Subject:
Year: Month: Day: page: ( )

علی فاضل نیا شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۸۳۲۳۰

تمرین: پیچیدگی قطعه کدهای زیر را محاسبه کنید.

تمرین اول:

```
for(i=n ; i>=1 ; i/=2)
        cout << i;
```

دستور	زمان اجرا	تعداد تکرار
1	C_1	$k+1$
2	C_2	k

$$T(n) = C1 \times (k+1) + C_2 \times k$$
$$= C1\,k + C1 + C_2 k$$
$$= C1 + (C1 + C_2)k$$
$$= C_3 + C_4 k$$
$$\xrightarrow{\log n+1} C_3 + C_4(\log n + 1)$$

$$n \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots\right) = 1 \rightarrow n\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}} \Rightarrow n = 2^{k-1} \Rightarrow \log n = k-1 \Rightarrow k = \log n + 1$$

تمرین دوم:

```
for(i=1; j=n; i<=j; i*=2 ; j/=2)
        cout << i+j
```

دستور	زمان اجرا	تعداد تکرار
1	C_1	$k+1$
2	C_2	k

$$T(n) = C1 \times (k+1) + C_2 \times k$$
$$= C1\,k + C_1 + C_2 k$$
$$= C_3 + (C_1 + C_2)k$$
$$= C_3 + C_4 k$$
$$\rightarrow C_3 + C_4\left(\frac{\log n + 2}{2}\right)$$

$$1 \times (2 \times 2 \times 2 \times \cdots) = n \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots\right)$$

$$\Rightarrow 1 \times (2)^{k-1} = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \Rightarrow n = \frac{2^{k-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$$

$$\Rightarrow 2^{2k-2} = n \rightarrow 2k-2 = \log n \rightarrow k = \frac{\log n + 2}{2}$$

Arman

تمرین سوم:

```
for (i=1 ; j=n ; i<=j ; i+=2 ; j-=2)
    cout<<i+j
```

دستور	زمان اجرا	تعداد تکرار
1	C_1	$k+1$
2	C_2	k

$$T(n) = C_1(k+1) + C_2 k$$
$$= C_1 k + C_1 + C_2 k$$
$$= C_1 + (C_1 + C_2)k$$
$$= C_3 + C_4 k$$
$$= C_3 + C_4\left(\frac{n+3}{4}\right)$$

$$1 + (2+2+\dots) = n - (2+2+\dots)$$
$$\Rightarrow 1 + 2(k-1) = n - 2(k-1)$$
$$= 1 + 2k - 2 = n - 2k + 2$$
$$\Rightarrow 4k = n + 2 + 2 - 1 \rightarrow 4k = n+3 \rightarrow k = \frac{n+3}{4}$$

تمرین چهارم:

```
for (i=1 ; i<=n-1 ; i++)
    for (j=2 ; j<=n ; j++)
        for (p=3 ; p<=n-2 ; p++)
```

دستور	زمان اجرا	تعداد تکرار
1	C_1	$k+1$
2	C_2	$k(k_1+1)$
3	C_3	$k k_1 (k_2+1)$
4	C_4	$k k_1 k_2$

$$k = n-1-1+1 = n-1$$
$$k_1 = n-2+1 = n-1$$
$$k_2 = n-2-3+1 = n-4$$

$$C_1(k+1) + C_2(k(k_1+1)) + C_3(k k_1(k_2+1)) + C_4(k k_1 k_2) = C_1 k + C_1 + C_2 k k_1 + C_2 k + C_3 k k_1 k_2 + C_3 k k_1 + C_4 k k_1 k_2$$
$$= C_1 + (C_1 + C_2)k + (C_2 + C_3)k k_1 + (C_3 + C_4) k k_1 k_2$$

Arman

ادامه در صفحه بعد

$= C_5 + C_6 k + C_7 k k_1 + C_8 k k_1 k_2$

$= C_5 + C_6 (n-1) + C_7 (n-1)^2 + C_8 (n-1)^2 (n-4)$

تمرین پنجم:

```
for(i=1 ; i<=n ; i++)
    for(j=1 ; j<=n ; j++)
        for(p=1 ; p<=i+j ; p++)
            cout << i+j+p;
```

دستور	زمان اجرا	تعداد تکرار
1	C_1	$k+1$
2	C_2	$k(k_1+1)$
3	C_3	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_1} i+j+1 = k_2+1$ → نون به تعداد هر دو حلقه پیش تکرار می‌شود به علاوه ۱ برای هر حلقه
4	C_4	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} i+j = k_2$

$k = n-1+1 = n \quad k_1 = n-1+1 = n$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i+j+1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j) + n^2$$

$$\sum_{j=1}^{n} i+j = i+1+i+2+\dots+i+n = ni + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{j} (ni) n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n(n+1))}{2} + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$C_1(k+1) + C_2(k(k_1+1)) + C_3(k_2+1) + C_4(k_2)$

$= C_1 k + C_1 + C_2 k k_1 + C_2 k + C_3 k_2 + C_3 + C_4 k_2$

$= C_1 + C_3 + (C_1 + C_2) k + C_2 k k_1 + (C_3 + C_4) k_2$

$$= C_5 + C_6 n + C_7 n^2 + C_8 \left(\sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} i+j \right)$$

$$= C_5 + C_6 n + C_7 n^2 + C_8 \left(\frac{(n \cdot n(n+1))}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

تمرین ششم:

```
for(i=1 ; i<=n ; i++)
    for(j=1 ; j<=n-i ; j++)
        cout << i+j ;
```

دستور	زمان اجرا	تعداد تکرار
1	C_1	$k+1$
2	C_2	$\sum_{i=1}^{k} (n-i+1) = k_1+1$
3	C_3	$\sum_{i=1}^{k} (n-i) = k_1$

i و n به تعداد k بار با هم ترکیب می‌شوند ← به علاوه یک خود حلقه

$$k = n-1+1 = n$$

$$\sum_{1}^{k} (n-i+1) = kn - \frac{k(k+1)}{2} + k$$

$$C_1(k+1) + C_2(k_1+1) + C_3(k_1)$$

$$= C_1 k + C_1 + C_2 k_1 + C_2 + C_3 k_1$$

$$= (C_1 + C_2) + C_1 k + (C_2 + C_3) k_1$$

$$= C_4 + C_5 k + C_6 k_1 = C_4 + C_5 (n) + C_6 \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$